Exercices Vecteurs Colinéaires

EXERCICE 1 : Tracer un triangle ABC

1) Construire Les points I, E et F tels que

- I milieu de [BC]
- $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AE} = -2\,\overrightarrow{AB}$

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 2 :

A, B et M trois points non alignés

Montrer que si I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$

EXERCICE 3 :

ABC un triangle . I milieu de [AB] et J milieu de [AC]

Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

EXERCICE 4 :

ABC triangle . M un point du plan défini par : $\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

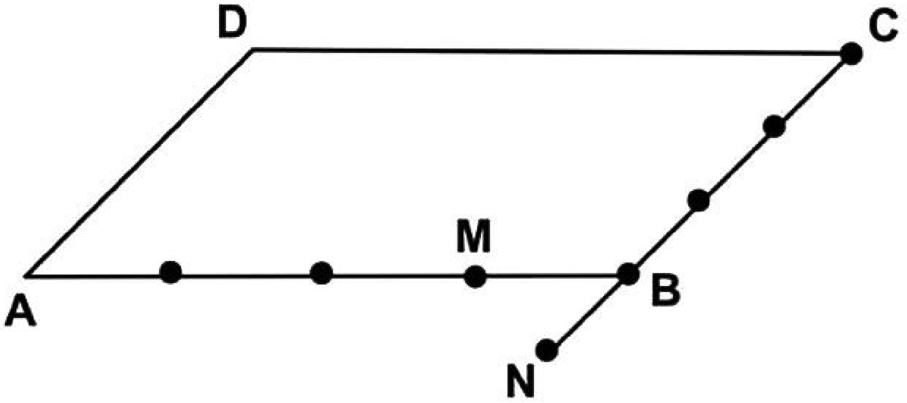
2) Construire M

EXERCICE 5 :

Montrer que si G est le centre de gravité d'un triangle ABC

alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AG}$

EXERCICE 6 : ABCD parallélogramme .



1) Compléter :

$\overrightarrow{AM} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CN} = \ldots\ldots \overrightarrow{CB}$

2) Exprimer $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

3) Montrer que D , M et N sont alignés

EXERCICE 7 : ABC un triangle

1) ⓐ Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

ⓑ Montrer que : $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BE}$

ⓒ Montrer que : $(AE) // (CF)$

2) Soient les points P et Q vérifiants :

$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$ et $2\overrightarrow{QC} + 3\overrightarrow{QB} = \vec{0}$

ⓐ Vérifier que $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$

ⓑ Montrer que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

3) Soit O le milieu de [AB] et soit H le point tel que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{CA}$

ⓐ Exprimer $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OQ}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

ⓑ Montrer que O , H , et Q sont alignés

4) Soient I , J , et K les points vérifiants : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

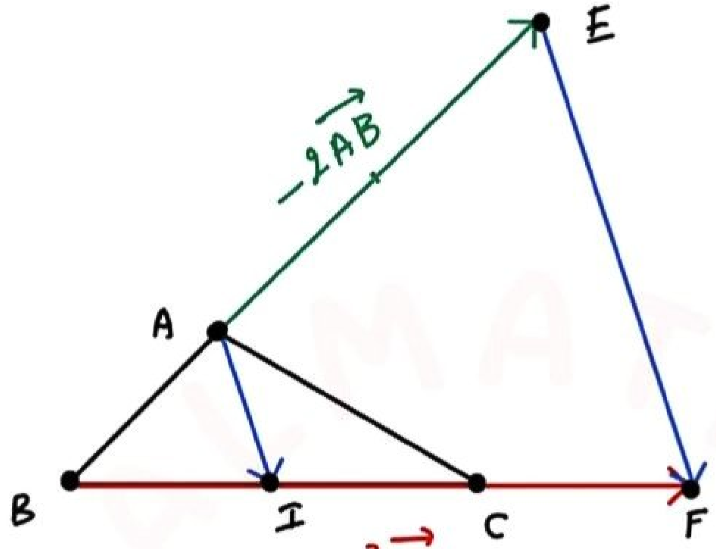
$\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Montrer que : $(JK) // (AI)$

Correction exercices vecteurs colinéaires

Exercice 1 :

1/



I milieu de $[BC]$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$

2/

$$\overrightarrow{\underset{\uparrow B}{A}I} = \overrightarrow{AB} + \overset{\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BI}}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$$

donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

- $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$???

on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB}$

donc $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB}$

d'où $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB}$

alors $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$

- $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$???

on a $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

car I milieu de $[BC]$

et $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$

donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\overrightarrow{BF}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$

Exercice 2 :

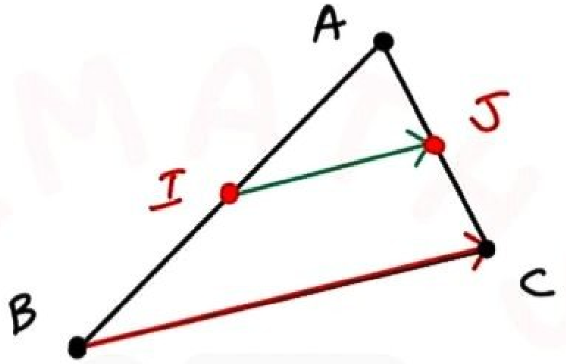
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$$

I I

$$= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$$ car I milieu de [AB]

$$= 2\overrightarrow{MI}$$

Exercice 3



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

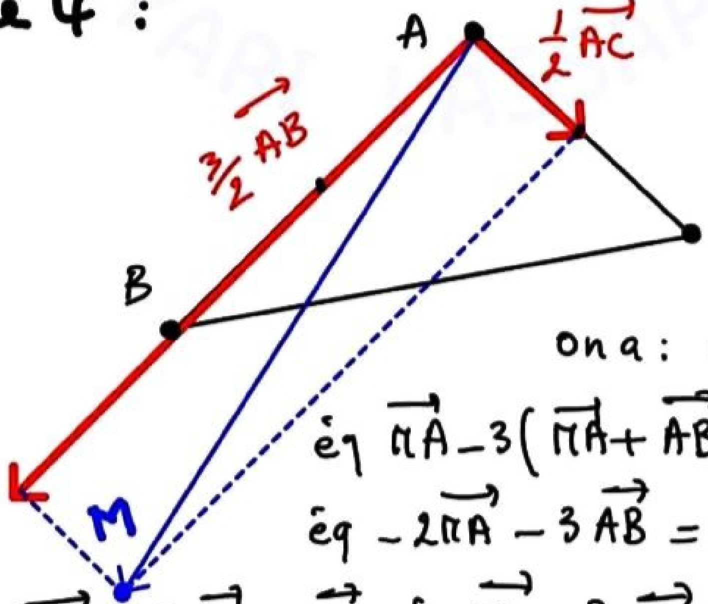
A

$$= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ}$$

$$= 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})$$

$$= 2\overrightarrow{IJ}$$

Exercice 4 :



On a : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

éq $\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$

éq $-2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

éq $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ éq $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 5 :

on a : $\overrightarrow{GA}+\underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\overrightarrow{GB}}+\underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\overrightarrow{GC}}=\vec{0}$

éq $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

éq $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

éq $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AG}$

Exercice 6 :

1/ $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

2/ $\underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\overrightarrow{DM}}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\underset{\substack{\uparrow\\ C}}{\overrightarrow{DN}}=\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{I}+\overrightarrow{CN}$

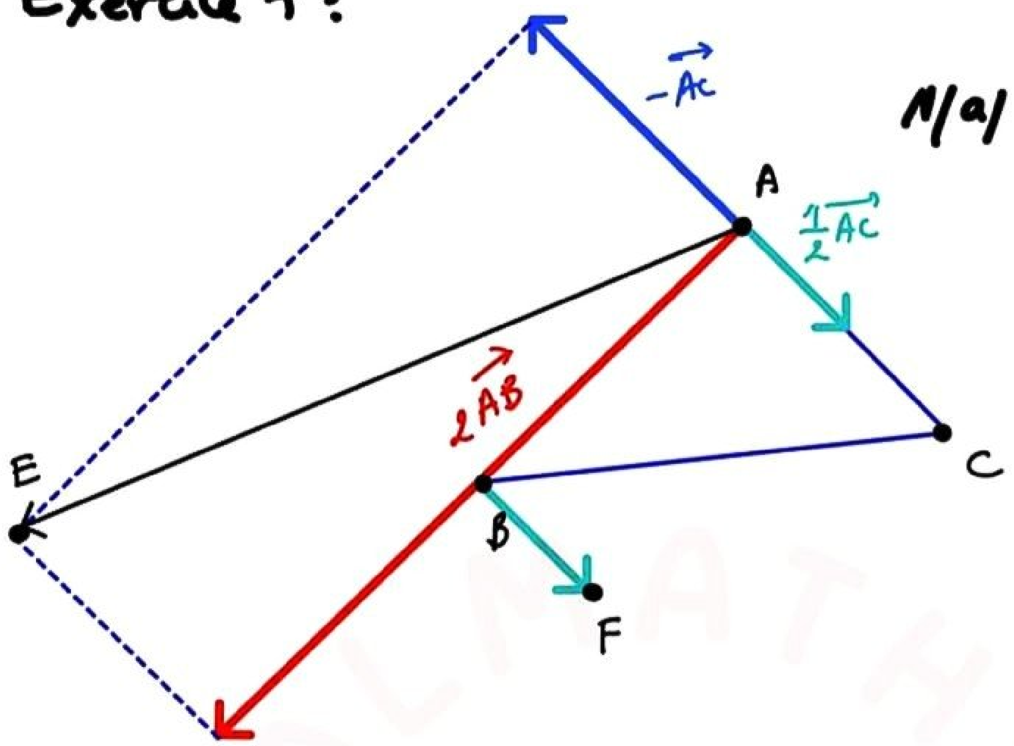
$=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\underbrace{\overrightarrow{CB}}_{I}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

3/ on a : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}\end{array}\right\}$

donc $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DN}$ alors $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires par suite D, M et N sont alignés

Exercice 7 :



1/a/ $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{AE} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

b/ $2\vec{AB} \overset{?}{=} 2\vec{AF} - \vec{AC}$

on a : • $2\vec{AF} - \vec{AC} = 2(\vec{AB} + \vec{BF}) - \vec{AC}$

$= 2\vec{AB} + \underbrace{2\vec{BF}}_{\vec{AC}} - \vec{AC} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AC} = 2\vec{AB}$

• $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$

$= -\vec{AB} + 2\vec{AB} - \vec{AC}$

$= \vec{AB} - \vec{AC}$

$= \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$

c/ $\vec{AE} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

$= 2\vec{AF} - \vec{AC} - \vec{AC}$

$= 2\vec{AF} - 2\vec{AC}$

$= 2\vec{CA} + 2\vec{AF} = 2(\vec{CA} + \vec{AF}) = 2\vec{CF}$

$\vec{AE}$ et $\vec{CF}$ sont colinéaires d'où $(AE)//(CF)$

2/ a/ on a : $2\overrightarrow{QC} + 3\overrightarrow{QB} = \vec{0}$

sig $2\overrightarrow{QC} + 3(\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$

sig $5\overrightarrow{QC} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

sig $5\overrightarrow{QC} = -3\overrightarrow{CB}$

sig $-5\overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CB}$

sig $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{-3}{-5}\overrightarrow{CB}$ sig $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}$

b/ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

$= \overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AC} - \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{1}{5}(2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB})$

3/ a/ • $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{OH} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

• $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$= -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

b/ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OH}$

alors $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OH}$ colinéaires donc O, Q et H alignés

4/ $\overrightarrow{J\underset{A}{K}} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{JK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$$

alors $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires

donc $(JK) \parallel (AI)$